GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

SĂ ÎNVĂȚĂM MATEMATICĂ FĂRĂ PROFESOR

CLASA A X – A

PROFIL ȘTIINȚE ALE NATURII

EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2021

CUPRINS

		Enunțuri	Rezolvări
1.	**Mulțimi de numere**	5	168
	1.1 Mulțimea numerelor reale	5	168
	1.1.1 Puteri cu exponent întreg. Proprietăți.	5	168
	1.1.2 Radical dintr-un număr real pozitiv. Proprietăți ale radicalilor	8	169
	1.1.3 Puteri cu exponent rațional. Aproximări raționale pentru numere iraționale sau reale. Puteri cu exponent real	14	170
	1.1.4 Noțiunea de logaritm. Proprietăți ale logaritmilor. Calcule cu logaritmi. Operația de logaritmare	18	171
	1.2 Mulțimea numerelor complexe	23	173
	1.2.1 Numere complexe sub formă algebrică. Conjugatul unui număr complex. Operații cu numere complexe	23	173
	1.2.2 Interpretarea geometrică a operațiilor de adunare și scădere a numerelor complexe și a înmulțirii acestora cu un număr real	29	174
	1.2.3 Rezolvarea de ecuații în C	33	174
	1.2.4 Numere complexe sub formă trigonometrică	36	175
	1.2.5 Rădăcinile de ordin n ale unui număr complex. Ecuații binome	42	177
	1.3 Teste grilă de autoevaluare	46	180
	Testul 1	46	180
	Testul 2	47	181
	Testul 3	48	182
2.	Funcții și ecuații	49	182
	2.1 Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate. Funcții inversabile	49	182
	2.2 Funcția putere cu exponent natural. Funcția radical. Ecuații iraționale ce conțin radicali de ordinal 2 sau 3	55	184
	2.3 Funcția exponențială. Ecuații exponențiale.	61	187

2.4 Funcția logaritmică. Ecuații logaritmice.	66	189
2.5 Funcții trigonometrice directe și inverse . . .	71	191
2.5.1 Funcții trigonometrice directe	71	191
2.5.2 Funcții trigonometrice inverse	79	193
2.6 Ecuații trigonometrice	87	194
2.7 Teste grilă de autoevaluare	97	197
Testul 1	97	197
Testul 2	98	199
Testul 3	99	200
Testul 4	100	201
3. Metode de numărare	101	202
3.1 Metoda inducției matematice	101	202
3.2 Mulțimi finite ordonate	104	203
3.3 Permutări	106	203
3.4 Aranjamente	108	204
3.5 Combinări	111	205
3.6 Binomul lui Newton	114	207
3.7 Teste grilă de autoevaluare	118	209
Testul 1	118	209
Testul 2	119	209
Testul 3	120	210
4. Matematici financiare	121	211
4.1 Elemente de calcul financiar: procente, dobânzi, TVA	121	211
4.2 Culegerea, clasificarea și prelucrarea datelor statistice. Reprezentarea grafică a datelor statistice. Interpretarea datelor statistice prin parametrii de poziție	127	213
4.3 Elemente de probabilități	133	214
4.3.1 Evenimente. Operații cu evenimente .	133	214
4.3.2 Probabilități. Proprietăți ale probabilităților	137	215
4.3.3 Probabilități condiționate. Evenimente independente	140	216
4.3.4 Schema lui Poisson. Schema lui Bernoulli	143	217
4.3.5 Variabile aleatoare	145	218
4.4 Teste grilă de autoevaluare	149	219
Testul 1	149	219
Testul 2	150	219

5.	Geometrie	151	220
	5.1 Reper cartezian în plan. Coordonate cartezi-ene în plan. Distanța dintre două puncte în plan.	151	220
	5.2 Coordonatele unui vector. Coordonatele sumei vectoriale. Coordonatele produsului dintre un vector și un număr real.	154	221
	5.3 Ecuații ale dreptei în plan. Coliniaritate, concurență	157	222
	5.4 Condiții de paralelism, condiții de perpendicularitate a două drepte din plan. Calcul de distanțe și arii	161	222
	5.5 Teste grilă de autoevaluare	166	224
	Testul 1	166	224
	Testul 2	167	225

1. Mulțimi de numere

1.1 Mulțimea numerelor reale

1.1.1 Puteri cu exponent întreg. Proprietăți.

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Definiție Fiind dat numărul $a \in \mathbf{R} - \{0\}$ și $n \in \mathbf{N}$, avem $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$ și $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exemple. a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; b) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{2^4}} = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

2. Proprietăți ale puterilor cu exponent întreg.

a) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ și $m, n \in \mathbf{Z}$ avem: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

b) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ și $m, n \in \mathbf{Z}$ avem: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

c) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ și $m, n \in \mathbf{Z}$ avem: $(a^m)^n = a^{mn}$.

d) Pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{Z}$ avem: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

e) Pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$ și $n \in \mathbf{Z}$ avem: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Exemple. a) $2^{-3} \cdot 2^4 = 2^{-3+4} = 2^1$;

b) $3^5 : 3^{-3} = 3^{5-(-3)} = 3^{5+3} = 3^8$; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}}$.

d) $(4^{-2})^3 = 4^{(-2)\cdot 3} = 4^{-6} = \frac{1}{4^6}$; e) $(2 \cdot 3)^{-2} = 2^{-2} \cdot 3^{-2}$.

b) Probleme rezolvate

1. Aduceți la forma cea mai simplă: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

Soluție. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = (2^{-1})^{-1} + (2^{-1})^{-2} + (2^{-1})^{-3} = 2^{(-1)(-1)} + 2^{(-1)(-2)} + 2^{(-1)(-3)} = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2 + 4 + 8 = 14$.

2. Aduceți la forma cea mai simplă: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$.

Soluție. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (2^{-1})^{-1} = 2^1 = 2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$.

Analog $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{64}{27}$ și produsul este: $2 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{64}{27} = \frac{32}{3}$.

3. Ordonați crescător numerele: $2^{1+2+\cdots+15}$ și $3^{1+2+\cdots+13}$.

Soluție. Avem: $2^{1+2+\cdots+15}=2^{\frac{15\cdot16}{2}}=2^{120}=\left(2^{3}\right)^{40}=8^{40}$.

Analog $3^{1+2+\cdots+13}=3^{\frac{13\cdot14}{2}}=3^{91}>9^{40}>8^{40}\Rightarrow 3^{1+2+\cdots+13}>2^{1+2+\cdots+15}$.

4. Ordonați descrescător numerele:

$$(-1)^1;\ (-2)^2;\ (-3)^3;\ (-4)^4;\ (-5)^5.$$

Soluție. Avem: $(-1)^1=-1$; $(-2)^2=2^2=4$; $(-3)^3=$ $=-3^3=-27$; $(-4)^4=4^4=256$; $(-5)^5=-5^5=-3125$.
Ordinea descrescătoare este: $256, 4, -1, -27, -3125$.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Calculați $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ și arătați că suma lor este egală cu: **11** **12** **13** **14** **15**

2. Calculați $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ și arătați că produsul lor este egală cu: **121** **125** **136** **144** **156**

3. Calculați $(-3)^4$ și $(-4)^3$ și arătați că suma lor este egală cu:

15 **16** **17** **18** **19**

4. Calculați $N=2^1\cdot2^2\cdot2^3\cdot2^4\cdot2^{-7}$ și arătați că este egal cu:

5 **6** **7** **8** **9**

5. Calculați $N=2^{-1}\cdot2^{-2}\cdot2^{-3}\cdot2^{-4}\cdot2^{15}$ și arătați că este egal cu:

16 **24** **32** **40** **48**

6. Calculați $N=2^{-1}:2^{-2}+2^{-3}:2^{-4}+2^{-5}:2^{-6}$ și arătați că este egal cu:

4 **5** **6** **7** **8**

7. Calculați $N=3^1:3^{-1}+4^1:4^{-1}+5^1:5^{-1}$ și arătați că este egal cu:

40 **50** **60** **70** **80**

8. Calculați $N = 2 : 2^2 + 4 : 4^2 + 8 : 8^2$ și arătați că este egal cu:

$\frac{5}{8}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{8}{8}$ $\frac{9}{8}$

9. Calculați: $N = (-1)^{-1} + (-1)^{-2} + (-1)^{-3}$ și arătați că este **egal cu:**

−2 −1 0 1 2

10. Calculați: $N = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ și arătați că **este egal cu:**

−7 −6 −5 −6 0

11. Calculați: $N = \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \frac{2^3}{2^4} + \frac{2^4}{2^5}$ și arătați că este egal cu:

0 1 2 3 4

12. Calculați: $N = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

60 61 62 63 64

13. Calculați: $N = (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot \dots \cdot (-1)^{50}$ și arătați că este **egal cu:**

−2 −1 0 1 2

14. Calculați: $N = (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{75}$ și arătați că este egal cu:

−2 −1 0 1 2

15. Calculați: $N = ((-1)^1)^2 \cdot ((-1)^2)^3 \cdot \dots \cdot ((-1)^{25})^{26}$ și arătați că este egal cu:

−2 −1 0 1 2

16. Calculați: $N = ((-1)^1)^3 + ((-1)^3)^5 \cdot \dots \cdot ((-1)^{15})^{17}$ și arătați că este egal cu:

−10 −8 −6 0 8

17. Arătați că numerele: $\frac{2^7}{2^8} + \frac{2^9}{2^{10}}$ și $\frac{3^2}{3^3} + \frac{3^4}{3^5} + \frac{2^6}{3^7}$ sunt egale cu:

0 1 2 3 4

1.1.2 Radical dintr-un număr real pozitiv. Proprietăți ale radicalilor.

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Fiind dat $a \in \mathbf{R}, a \geq 0$ și $n \in \mathbf{N}$, numim **radical de ordinal** n al numărului a, unicul număr real pozitiv care ridicat la puterea n să dea valoarea a.

Notăm radicalul de ordin n al numărului real a cu $\sqrt[n]{a}$ și vom studia în continuare cazurile $n = 2, 3$, adică $\sqrt{a}$ și $\sqrt[3]{a}$.

Radicalul de ordin 2 al numărului real și pozitiv a este unica soluție pozitivă a ecuației $x^2 = a$.

Radicalul de ordin 3 al numărului real și pozitiv a este unica soluție pozitivă a ecuației $x^3 = a$.

Exemple. a) $\sqrt{4} = 2$, deoarece $2^2 = 4$ sau 2 este rădăcina pozitivă a ecuației $x^2 = 4$.
b) $\sqrt[3]{27} = 3$, deoarece $3^3 = 27$ sau 3 este rădăcina pozitivă a ecuației $x^3 = 27$.

2. **Proprietățile radicalului de ordin 2 dintr-un număr real și pozitiv.**

a) Dacă $a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

b) Dacă $a \geq 0, b > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

c) Dacă $a < 0, b < 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$.

d) Dacă $a < 0, b < 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$.

e) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt{a^2} = |a|$.

f) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$.

g) Dacă $a > 0 \Rightarrow a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$.

h) Dacă $a < 0 \Rightarrow a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$.

i) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow \left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m}$.

j) Dacă $a \geq 0, b \geq 0$ avem: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ - comparare.

k) Dacă $a \in \mathbf{R}$ și $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ - raționalizare numitor.

l) Dacă $a > 0, b > 0, a \neq b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ - raționalizare numitor.

m) Dacă $a > 0, b > 0, a \neq b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$ - raționalizare numitor.

Exemple. a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$; b) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$;

c) $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

3. Proprietățile radicalului de ordin 3 dintr-un număr real.

a) Dacă $a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$.

b) Dacă $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

c) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$.

d) Dacă $a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$.

e) Dacă $a \in \mathbf{R} \Rightarrow \left(\sqrt[3]{a}\right)^m = \sqrt[3]{a^m}$.

f) Dacă $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$ - raționalizare numitor.

g) Dacă $a, b \in \mathbf{R}, a \neq b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$ - raționalizare numitor.

h) Dacă $a, b \in \mathbf{R}, a \neq b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b}$ - raționalizare numitor.

i) h) Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, avem: $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

Exemple. a) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3 \cdot 5} = \sqrt[3]{15}$; b) $\sqrt[3]{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}}$;

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5 \cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}{5-2} = \frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3}$;

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2 \cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}{2-3}$.

4. Formulele radicalilor compuși

Dacă $a > 0, b > 0, a^2 \geq b$ și $c = \sqrt{a^2 - b}$, atunci:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}} \text{ și } \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

Exemplu. Dacă avem de calculat $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$, calculăm mai întâi $c = \sqrt{3^2 - 8} = \sqrt{9 - 8} = 1$ și apoi:

$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{1} = 1 + \sqrt{2}.$$

b) Probleme rezolvate

1. Calculați: $\sqrt{4 \cdot 1{,}69} + \sqrt{9 \cdot 1{,}44} + \sqrt{16 \cdot 1{,}21}$.

Soluție. $\sqrt{4 \cdot 1{,}69} + \sqrt{9 \cdot 1{,}44} + \sqrt{16 \cdot 1{,}21} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{1{,}69} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{1{,}44} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{1{,}21} = 2 \cdot 1{,}3 + 3 \cdot 1{,}2 + 4 \cdot 1{,}1 = 2{,}6 + 3{,}6 + 4{,}4 = 6{,}2 + 4{,}4 = 10{,}6$.

2. Calculați: $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{\frac{9}{36}}$.

Soluție. $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{\frac{9}{36}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{36}} = \frac{2}{3} + \frac{3}{6} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6}$.

3. Scoateți factorii corespunzători de sub radicali:

a) $\sqrt{200}$ b) $\sqrt{1\,200}$ c) $\sqrt{1\,500}$.

Soluție. a) $200 = 2^3 \cdot 5^2 \Rightarrow \sqrt{200} = \sqrt{2^3 \cdot 5^2} = 2 \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

b) $1\,200 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 3 \Rightarrow \sqrt{1\,200} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2 \cdot 3} = 2^2 \cdot 5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$.

c) $1\,500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 3 \Rightarrow \sqrt{2^2 \cdot 5^3 \cdot 3} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5 \cdot 3} = 10\sqrt{15}$.

4. Calculați: $\left(\sqrt{3}\right)^3 + \left(\sqrt{12}\right)^3$.

Soluție. $\left(\sqrt{3}\right)^3 + \left(\sqrt{12}\right)^3 = \sqrt{3^3} + \left(\left(2\sqrt{3}\right)\right)^3 = 3\sqrt{3} + 2^3\sqrt{3^3} = 3\sqrt{3} + 8 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$.

5. Calculați: $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{64}$.